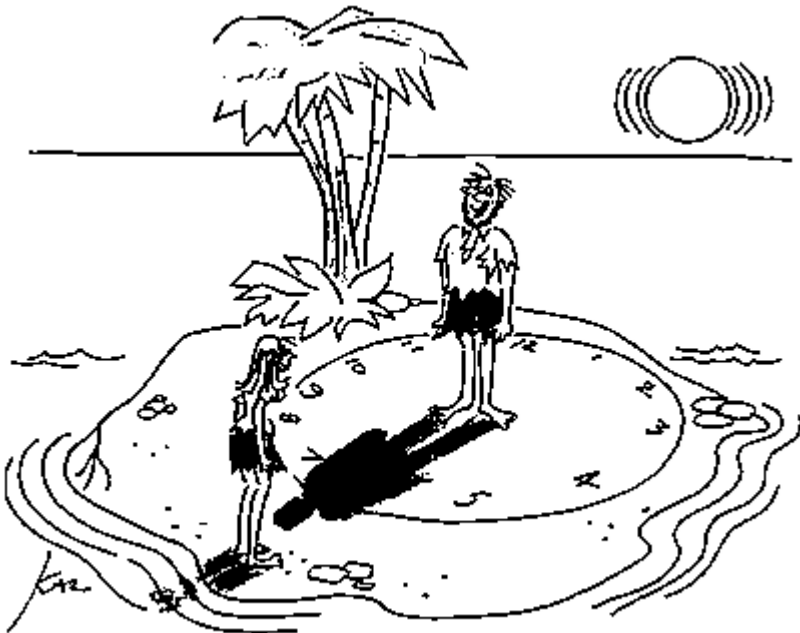


Matisz Attila

A napóra matematikája



"See, I told you it's time for sex!"

Frissítve: 2021.05.15.

Tartalom

<u>A napóra működése, napóratípusok.....</u>	<u>5</u>
<u>Ekvatoriális napóra.....</u>	<u>6</u>
<u>Horizontális napóra.....</u>	<u>9</u>
<u>Vertikális napóra.....</u>	<u>15</u>
<u>Elforduló vertikális napóra.....</u>	<u>19</u>
<u>Emelkedő napóra.....</u>	<u>23</u>
<u>Poláris, orientális és okcidentális napóra.....</u>	<u>24</u>
<u>Analemmatikus napóra.....</u>	<u>29</u>
<u>Hengernapóra.....</u>	<u>33</u>
<u>A gyűrűs napóra és szerkesztése.....</u>	<u>36</u>
<u>„Éjszakai napóra”, a nokturlábium.....</u>	<u>41</u>
<u>A helyi-idő és a zónaidő közötti korrekciók.....</u>	<u>42</u>
<u>Időegyenlet.....</u>	<u>43</u>
<u>Hosszúsági korrekció beépítése a képletekbe.....</u>	<u>44</u>
<u>A helyi meridián pontos kijelölése.....</u>	<u>44</u>
<u>Deklinációs vonalakat szerkesztő eszköz:.....</u>	<u>45</u>

Köszönet

Itt szeretném kifejezni hálás köszönetemet Dr. Péntek Kálmán barátomnak, aki részletesen átvizsgálta a dolgozatot, szakmai és matematikai szempontból, valamint értékes tanácsokkal látott el, melyek alapján átdolgoztam és véglegesítettem a füzetet.

Bevezetés

Mindig is izgatott a régmúlt időkben és a ma is használt csillagászati eszközök működése, az eszközök elkészítésének, szerkesztésének módja. Így van ez a napórákkal is. Ebben a kis füzetben összeszedtem a leggyakrabban készített napórák szerkesztésének módját, különös tekintettel voltam az óravonalak és deklinációs vonalak képleteinek levezetésére, melyekhez nem találván megfelelő szakirodalmat, magam vezettem le. A levezetésekben csak középiskolai matematika tananyagot használtam fel.

A dolgozathoz tartozik egy „**napmatek.xlsx**” táblázat, melyben az egyes napórák óravonalait és deklinációs vonalait kiszámolhatjuk különböző paraméterek megadásával. Ilyenek a napóra mérete, a földrajzi szélesség, a Nap deklinációja stb.

Természetesen nem azért készítettem ezt a jegyzetet, hogy ezek után feltétlen az itt leírtak felhasználásával készítsünk napórát, mert erre sok profi program áll a rendelkezésünkre, hanem azért, hogy ha valaki veszi a fáradságot és átrágja magát a jegyzeten, másként tekinthet a napórákra és tökéletesebben fogja ismerni azok készítési módját, működési elvét.

Magam is csak néhány esetben vetemedek a számításaim alapján napóra készítésre, ilyen például az analemmatikus napóra és a poláris napóra, de a legtöbb esetben a Shadows 4.0 beta 11 verzióját használom, mely több csillagászati eszköz szerkesztését teszi lehetővé. Ebben a programban lehetőség van a nyelvi táblát (Shadows.language.txt) magyarra fordítani, amit számos helyen meg is tettem.¹ Sajnos több kifejezés be van építve a programba, ezért azt lehetetlen lefordítani, valamint több olyan kifejezéssel találkoztam, amit sem angolul sem magyarul még nem értek tökéletesen, ezért azok fordítását mellőztem.

¹Ha valakit érdekel a fordítás, szívesen elküldöm.

Számításaim helyességét úgy ellenőriztem, hogy megfelelő paraméterekkel szerkesztettem a Shadows program segítségével egy adott típusú napórát, azt kinyomtattam és az óravonalak szögét, illetve a deklinációs vonalak pontjait helyről – helyre ellenőriztem. Úgy is fogalmazhatnék, hogy ezzel a módszerrel a Shadows programot ellenőriztem és az minden esetben helyesnek bizonyult.

Szakirodalom

Kulin György „**A távcső világa**” c. könyvének a „Napórák készítése” (Ponori Thewrewk Aurél) fejezete.

Sundial Wikipédia

<https://en.wikipedia.org/wiki/Sundial>

The mathematics of sundials

Australian Senior Mathematics Journal 22 (1)

(<http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ802706.pdf>)

Budd, C. J. & Sangwin, C. J. (2000). Analemmatic Sundials: How to Build One and Why They

Work. Accessed August 2007 at

<http://plus.maths.org/issue11/features/sundials>.

Budd, C. J. & Sangwin, C. J. (2001). Mathematics Galore. Oxford: Oxford University Press.

Lennox-Boyd, M. (2006). Sundials: History, Art, People, Science. London: Frances Lincoln.

A napóra működése, napóratípusok

Mint ismeretes, a napórák a **valódi szoláris** időt mutatják, ami a Napnak a Föld körüli látszólagos mozgásából adódik. Mivel a Föld az ekliptika mentén nem jár egyenletesen, ezért az időmérés szempontjából bevezettek egy **Fiktív Ekliptikai Középnapot**, amely állandó szögsebességgel ugyanannyi idő alatt járja körül az ekliptikát, mint a valódi Nap, és perihélium-átmenet időpontjában egybe esik a valódi Nappal. Ámde – a mérés szempontjából – ezt a közép-ekliptikai napot a legnagyobb gömbi körök mentén merőlegesen vetíteni kell az ekvátorra, ahol az óraszöget mérjük, így ez sem lesz egyenletes. Ezért bevezettek egy **Fiktív Egyenlítői Középnapot**, amely az ekvátor mentén mozog egyenletesen, és mindig akkor van a tavaszpontban, amikor a közép-ekliptikai nap. Az óránk az így kapott **középidő**² szerint, a napóra viszont a **valódi napidő** (valódi szoláris idő) szerint jár. A valódi szoláris idő és a középidő különbségét időegyenlítésnek nevezzük. (Lásd „Időegyenlet” címszó alatt.) A napórák járását ezzel az időegyenlítéssel korrigálni kell.

A napórák számtalan változata közül a legelterjedtebbek az ekvatoriális, a horizontális és a vertikális napórák, de beszélni fogunk még poláris, orientális, okcidentális, analemmatikus és hengernapórákról is. Továbbá egy különös csillagászati időmérő eszközről is szólunk, amit „az éjszaka napórája” néven illetünk, mert ezzel is a nap pillanatnyi helyzete alapján határozhatjuk meg a helyi szoláris időt.

1. ábra.

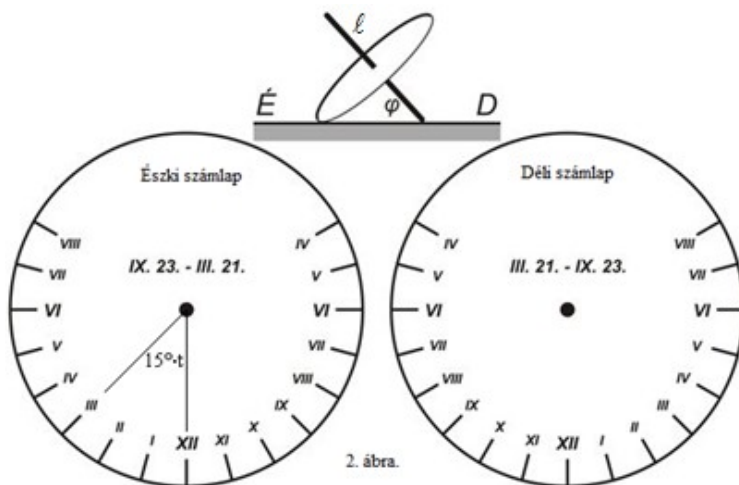


²A helyi középidő a Fiktív Egyenlítői Középnap óraszöge + 12 óra.

Ekvatoriális napóra

Ezt az órát magyarul **egyenlítői napórának** nevezik, de ebben a jegyzetben ekvatoriálisnak fogjuk nevezni.

Az óra előnye az, hogy az órabeosztása független a földrajzi szélességtől, tehát bárhol használható, csak úgy kell irányítani, hogy az árnyékvetője a pólusra mutasson, a 12 órapont pedig északra.³

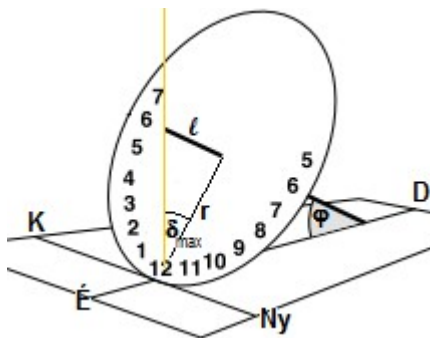


Az óra alapsíkja párhuzamos az ekvátorral (égi egyenlítővel), árnyékvetője pedig a Föld forgástengelyével. A napóra számlapját tekintve ezt a legkönnyebb elkészíteni, mivel az órák beosztása egyenletes, vagyis a teljes kört 24 egyenlő (15° -os) részre kell beosztani.

A $\theta = 15^\circ \cdot t$ képlet segítségével kiszámolhatjuk az óravonalak középponti szögét, ahol t a 12^h előtti, illetve utáni idő. Napóránk esetében a t valós szám, értékét $[-8; +8]$ között érdemes változtatni, mert földrajzi szélességünkön a Nap legkorábban $12-8=4$ órakor kel és legkésőbb $12+8=20$ órakor nyugszik, ha a nyári időszámítást nem használjuk. Ha t egész szám, akkor óránkénti beosztáshoz jutunk. (Amennyiben $t=0,5$ -enként változik, akkor a félóránkénti beosztást kapjuk. $0,25$ századonként változtatva negyedórás beosztáshoz jutunk, stb.) A továbbiakban a t paraméter a képletekben ezt fogja jelenteni.

³Ha a 12 órapontot kissé eltoljuk, beépíthetjük a hosszúsági korrekciót is.

Az árnyékvető l minimális hosszát pedig az $l = r \cdot \tan(\delta_{max})$ képlet alapján határozhatjuk meg, ahol r a számlap sugara, δ_{max} pedig a Nap maximális deklinációja. ($\sim 23,44^\circ$)⁴ Lásd a mellékelt ábrán az r , l befogójú derékszögű háromszöget, ahol a sárga vonal a Nap sugara délben.



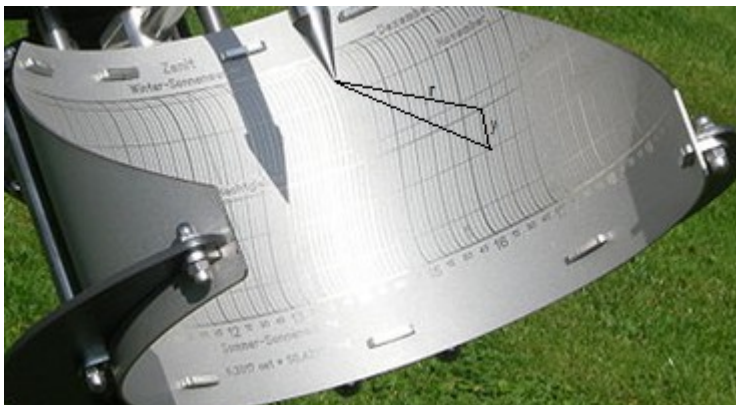
A sík számlapú óra hátránya, hogy az árnyékvető csak „nyáron” a napéjegyenlőségek közötti időben vet árnyékot az északi számlapra, ezért „téli” számlapot is kell készítenünk a sík déli oldalára. A kettős számlapot kiküszöbölhetjük, ha egy hengerpalást belsejébe helyezzük a számlapot. (Következő kép.)



A hengerpalástra készíthetünk deklinációs vonalakat is, melyek a napéjegyenlőségek, napfordulók és egyéb dátumokra - a Nap deklinációja

⁴A minimális hosszúság megadása biztosítja, hogy az árnyékvető árnyéka a napfordulók alkalmával is elérjék az órapontokat.

alapján - megrajzolják a megfelelő deklinációs vonalat, ami esetünkben az egyenlítői körívvel párhuzamos körívek. Ennek a vonalnak a hengerpalást középvonalától mért távolságát (y) a következő képlet alapján számolhatjuk ki: $y = r \cdot \tan(\delta)$, ahol δ a Nap deklinációja az adott időpontban. Lásd a következő képen, ahol a derékszögű háromszög y befogójával szemközti szöge δ .



Néhány szó a deklinációs vonalakról

A deklinációs vonalak a napórákon, az adott naphoz tartozó dátumot mutatják, ezért dátumvonalaknak is nevezhetjük. Ezeket azért tudjuk szerkeszteni, mert a Nap deklinációja egy év folyamán $-23,44^\circ$ -tól $+23,44^\circ$ -ig oda-vissza folyamatosan változik, így az árnyékvető csúcspontjának árnyéka is a dátum függvényében változik.

A deklinációs vonalakat vagy a hónap kezdődátumaihoz szerkesztik, vagy egy-egy családi ünnep dátumaihoz, egyházi épületeken lehet egyházi ünnep dátumához szerkeszteni, esetleg az állatövi jegyek kezdődátumaihoz.

Az állatövi jegyek kezdődátumaihoz tartozó deklinációs értékeket a jegyzet 30. oldalán a táblázat tartalmazza. Néhány esetben igyekeznek egyenletesebb deklinációs vonalakat készíteni.

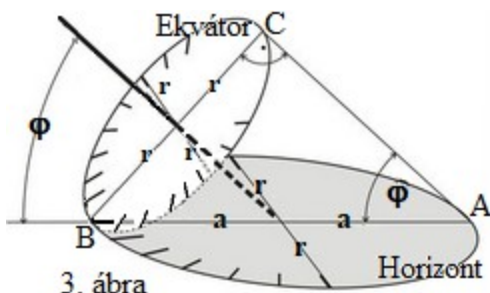
Például: $\delta = 0^\circ; \pm 5^\circ; \pm 10^\circ; \pm 15^\circ; \pm 20^\circ; \pm 23,4$

Az előző képen ilyen napóra látható, melyen az árnyékvető csúcsa az egyenlítői körív középpontjában van. Kissé zavaró, hogy az óravonalak fél analemma görbék az időegyenlítés kiküszöbölése végett. A fenti kép napórája a június 21-től december 21-ig használatos, ezért ehhez a napórához tartozik még egy hasonló napóra az év többi napjára, ahol az analemma görbék másik fele van feltüntetve. Ez sokkal jobb megoldás, mint amikor az óravonalak teljes analemma görbéje fel van tüntetve, ami még egy szakembernek is nehézséget okoz az idő leolvasásában.

Figyeljük meg, hogy a hengerpalást jobb és bal oldala ferdén le van vágva, mivel télen a nap később kel és korábban nyugszik az adott földrajzi szélességen.

Horizontális napóra

Ha a kör alakú ekvatoriális napórát, az ekvátorra merőleges egyenesekkel vetítjük a horizont síkjára, horizontális napórához jutunk, ahol a körlap vetülete ellipszis lesz. (3. ábra.) A horizontális napóra árnyékvetője az ekvatoriális árnyékvetőjének

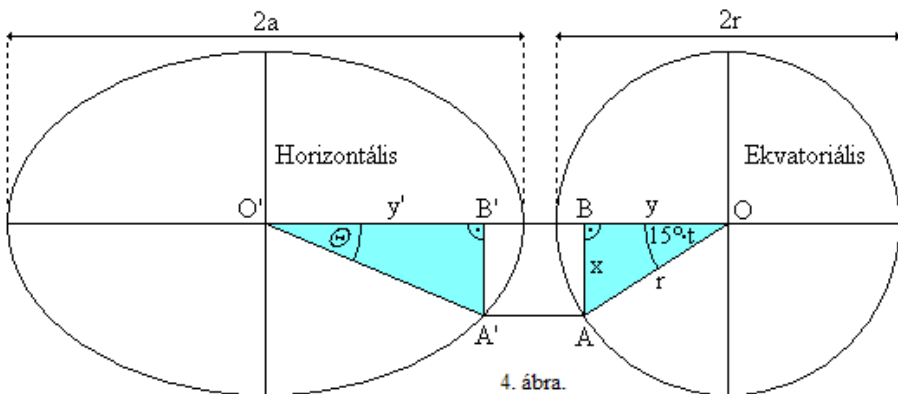


meghosszabbítása az ellipszis középpontjáig.

Az ábrán r az órabeosztás körének a sugarát jelenti, a pedig a vetületi ellipszis fél nagytengelyét és φ a napóra földrajzi szélességét. Az ellipszis fél kistengelye megegyezik a kör sugarával. Az ABC derékszögű háromszögből:

$$\sin(\varphi) = \frac{2 \cdot r}{2 \cdot a} \quad ; \text{ ebből } a = \frac{r}{\sin(\varphi)}$$

Most már csak az órabeosztások szögei közötti összefüggést kell meghatározni. Ezért a 3. ábra két számlapját forgassuk egy síkba úgy, hogy a 12 óra pontjai egymás mellé kerüljenek (4. ábra), ahol az O'A' sugár lesz az óramutató.



Az OAB háromszögből: $x = r \cdot \sin(15^\circ \cdot t)$, $y = r \cdot \cos(15^\circ \cdot t)$
Másképp $a = \frac{r}{\sin(\varphi)}$ mintájára $y' = \frac{y}{\sin(\varphi)}$, ezért

$y' = \frac{r \cdot \cos(15^\circ \cdot t)}{\sin(\varphi)}$ Ezen képletek segítségével kiszámolhatjuk a

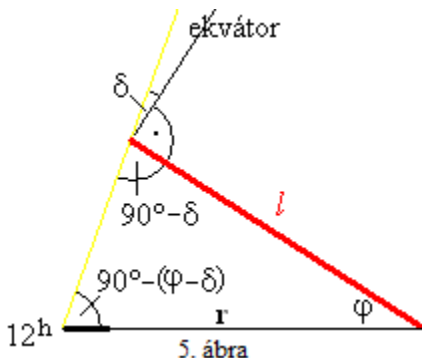
vetületi ellipszis órapontjainak koordinátáit és egy adott koordináta-rendszerbe berajzolhatjuk. Ha viszont nem ellipszis alakú számlapot szeretnénk készíteni, akkor célszerű kiszámolni a 4. ábrán látható Θ szöveget. Az $O'A'B'$ háromszögből:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{y'} = \frac{r \cdot \sin(15^\circ \cdot t)}{\frac{r \cdot \cos(15^\circ \cdot t)}{\sin(\varphi)}} = \sin(\varphi) \cdot \tan(15^\circ \cdot t)$$

θ értékét elég $t=0$ -tól 6-ig kiszámolni, mert az órabeosztás az észak-déli vonalra szimmetrikus. Az óravonalak megrajzolását célszerű 4^h -tól 20^h -ig megszerkeszteni, mert hazánkból a Nap sohasem látszik 4 óra előtt és 20 óra után.

Ha nem akarunk túl hosszú árnyékvetőt készíteni, akkor célszerű meghatározni az árnyékvető ℓ minimális hosszát úgy, hogy az árnyék a nyári napforduló idején is elérje a 12-es órapontot.

A mellékelt 5. ábrán az óra számlap-síkja a jegyzet síkjára merőleges és az óra árnyékvetője, valamint a 12 óra vonala a jegyzet síkjában van. δ jelöli a Nap maximális deklinációját, ami $\sim 23,44^\circ$, a sárga vonal pedig a Nap legnagyobb delelési magasságának irányát.



A szinusztétel alapján:

$$\frac{l}{r} = \frac{\sin(90^\circ - (\varphi - \delta))}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} = \frac{\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta)}{\cos(\delta)}$$

$$\frac{l}{r} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \tan(\delta) \quad \text{ebből} \quad l = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \tan(\delta)) ,$$

ahol r a 12 órapont távolsága az árnyékvető kiindulási pontjától.

Horizontális és vertikális napórák esetén a deklinációs vonalak, a vetítés miatt hiperbolák lesznek. Tekintsük az árnyékvető csúcspontján átmenő összes olyan napsugarat, amely egy adott napon megvilágítja a számlapot. Mivel a Nap deklinációja egy napon állandónak vehető, ezek a napsugarak egy $90^\circ - \delta$ fél nyílásszögű kúppalástot határoznak meg, melynek a horizont síkjával való metszésvonala hiperbola, mivel a kúppalást két egyenesre párhuzamos a horizonttal.⁵

Amennyiben $\delta = 0^\circ$, akkor a kúppalást fél nyílásszöge 90° , vagyis a palást síkba megy át, aminek a horizonttal alkotott metszésvonala egyenes lesz. Ez a napéjegyenlőségi vonal.

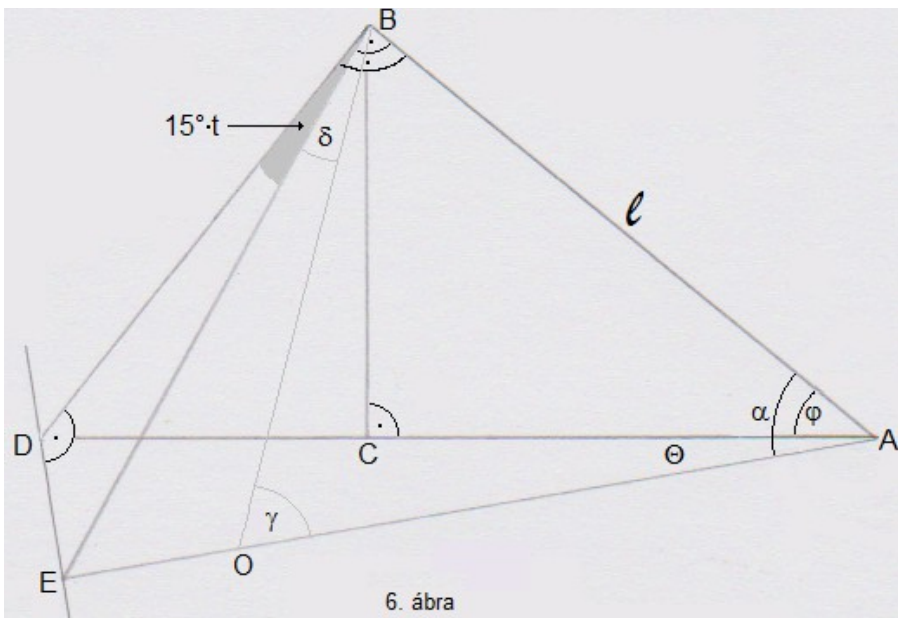
Horizontális napóra deklinációs vonalai

Első megoldás:

Tekintsük a 6. ábrát, ahol az A pont az árnyékvető talppontja a horizonton, az $AB = \ell$ árnyékvető a pólusra mutat, AC szakasz az AB szakasz horizontra eső merőleges vetülete, mely észak felé mutat, 12 óra irányába.

⁵Jobban elképzelhetjük a kúppalástot, ha az 5. ábrán a piros és sárga vonal $90^\circ - \delta$ szögét rögzítve, a sárga egyenest a piros vonal körül megpörgetjük.

DBE $\varphi = 15^\circ \cdot t$ fok). Mindkét fénysugár merőleges az árnyékvetőre és a két sugár kimetszi a DE napéjegylenlőségi egyenest a horizonton. Legyen a BO egyenes az árnyékvető csúcsán áthaladó napsugár egy tetszőleges napon, szintén a fenti t időpillanatban, amikor a Nap deklinációja nem 0. Ezért az O pont benne van az ABE síkban, mivel O rajta van az AE órávonalon. Mivel $\angle DAE = \Theta$, így az előbb levezetett képlet alapján $\Theta = \arctan(\sin(\varphi) \cdot \tan(15^\circ \cdot t))$.



Meg kell határozni az AO szakasz hosszát, hogy az O – deklinációs vonal pontját – fel tudjuk rajzolni az óravonalra. O pont, az adott napon és időben a (δ) deklinációs vonal (hiperbola) és az AE óravonal metszéspontja. Ha ezt a távolságot a nap minden t időpontjára kiszámoljuk, és bejelöljük a megfelelő óravonalakra, megkapjuk az adott naphoz tartozó deklinációs vonalat.

1. Az ABD háromszögből: $\tan(\varphi) = \frac{BD}{l}$, ahonnan
 $BD = l \cdot \tan(\varphi)$

2. A BDE háromszögből: $\cos(15^\circ \cdot t) = \frac{BD}{BE}$, ahonnan
 $BE = \frac{BD}{\cos(15^\circ \cdot t)} = \frac{l \cdot \tan(\varphi)}{\cos(15^\circ \cdot t)}$

3. Jelöljük a BAE szöget α -val. A BAE derékszögű háromszögből: $\tan(\alpha) = \frac{BE}{l}$,
 ezért $\alpha = \arctan\left(\frac{BE}{l}\right) = \arctan\left(\frac{\tan(\varphi)}{\cos(15^\circ \cdot t)}\right)$

4. Végül tekintsük az AOB háromszöget. A háromszög ABO szöge:
 $\angle ABO = 90^\circ - \delta$ és a
 $\gamma = \angle AOB = 180^\circ - \alpha - \angle ABO = 90^\circ - (\alpha - \delta)$ Most a szinusz tétel alapján: $\frac{AO}{l} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(\gamma)}$, amiből
 $AO = \frac{l \cdot \sin(90^\circ - \delta)}{\sin(\gamma)} = \frac{l \cdot \cos(\delta)}{\sin(90^\circ - (\alpha - \delta))} = \frac{l \cdot \cos(\delta)}{\cos(\alpha - \delta)}$.

Összefoglalva: (A napóra elkészítése.)

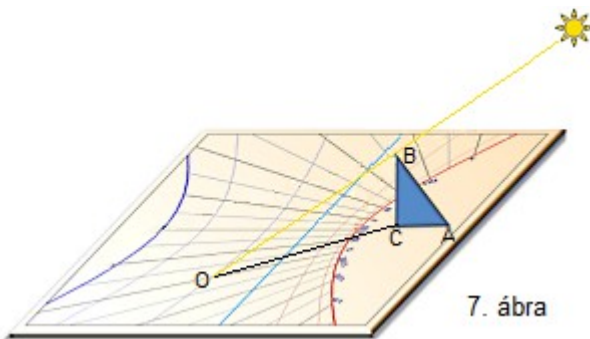
1. Határozzuk meg az árnyékvető l hosszát.
2. Rajzoljunk egy AC észak felé mutató félegyenest.
3. Számoljuk ki az óravonalak θ szögét és mérjük fel A-ból kiindulva AC mindkét oldalára.
4. Számoljuk ki az AO távolságokat és A-ból mérjük rá a megfelelő óravonalra.

Megjegyzés: A fenti leírás természetesen csak elvi jellegű, mivel a sok számolás miatt – megfelelő program nélkül – ez mazochizmus lenne. A dolgozathoz mellékelt **napmatek.xlsx** táblázat alapján már jóval könnyebb a szerkesztés, de még így is többet kell vele dolgozni, mint egy

megfelelő napóra készítő programmal. Viszont a fenti leírás alapján már alaposabban megértjük ezt a napórátípust.

Második megoldás:

Deklinációs vonalakkal ellátott horizontális napóra készítésekor, az adott nap minden időpontjára meg kell határozni az árnyékvető csúcspontjának a horizont síkjára eső árnyékát. Ehhez szükségünk



7. ábra

van a Nap δ deklinációjára, a h magasságára az adott időpontban, a τ pillanatnyi óraszögre és a φ földrajzi szélességre.

A 7. ábrán a napóra $l = AB$ árnyékvető B csúcspontjának árnyéka, adott t időben és δ deklináció esetén az O pont, horizontra eső merőleges vetülete pedig C.

Mivel a $CAB \sphericalangle = \varphi$, ezért $BC = l \cdot \sin(\varphi)$, $AC = l \cdot \cos(\varphi)$. Meg kell határoznunk az OC távolságot a $h = BOC \sphericalangle$ szög ismeretében. ha a Nap magassága az adott t időben, amit a $\sin(h) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta)$ ismert képlet ad.⁶ Mint ismeretes a helyi szoláris idő a Nap óraszöge + 12 óra, ezért helyi szoláris időben a Nap óraszöge reggel 6 órakor -90° , 7 órakor -75° , ... 12 órakor 0° , ... este 6 órakor pedig 90° . (Itt az időt fokokra számoltuk át.) Ha ezt az értéket, a Nap deklinációját és a földrajzi szélességet beírjuk az előző képletbe, megkapjuk a Nap h magasságát az adott időpontban. Ezek után az OCB derékszögű háromszögből BC ismeretében OC meghatározható: $\tan(h) = \frac{BC}{OC}$, ezért $OC = \frac{BC}{\tan(h)} = \frac{l \cdot \sin(\varphi)}{\tan(h)}$

Összefoglalva. Kiszámoljuk $\tan(\Theta) = \sin(\varphi) \cdot \tan(15^\circ \cdot t)$ képlet alapján Θ szögek értékeit és megrajzoljuk az A pontból kiinduló óravonalat.

⁶A képlet a horizontális és ekvatoriális koordinátarendszerek közötti átszámítást teszi lehetővé.

Vertikális napóra

Itt a kör alakú, ekvatoriális napórát vetítjük – a síkjára merőleges egyenesekkel – egy kelet-nyugat irányú függőleges síkra.

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi) = \frac{2 \cdot r}{2 \cdot a} \quad . \quad \text{Ebből}$$

zontális síkra eső vetületét y' -vel jelöl-

$$\tan(\Theta) = \frac{x}{y''} = \frac{r \cdot \sin(15^\circ \cdot t)}{\frac{r \cdot \cos(15^\circ \cdot t)}{\cos(\varphi)}} = \cos(\varphi) \cdot \tan(15^\circ \cdot t) \quad .$$

Itt is célszerű az árnyékvető minimális hosszát meghatározni, hogy a téli napforduló idején az árnyék elérje a 12 órapontot. A 9. ábrán a napóra árnyékvetője és a 12 óravonal által meghatározott ABC háromszög látható, ahol a sárga egyenes a téli napforduló idején az árnyékvető csúcsát érintő napsugarat jelenti. Az árnyékvető a függőleges fallal

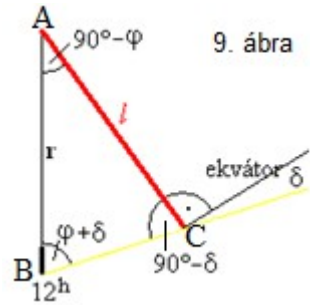


$90^\circ - \varphi$ szöget zár be, az
 $\angle ACB = 90^\circ - \delta$, ezért az
 $\angle ABC = \varphi + \delta$.

Írjuk fel az ABC háromszögre a szinusz tételt,
melynek alapján:

$$\frac{l}{r} = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin(90^\circ - \delta)}, \text{ ezért } l = \frac{r \cdot \sin(\varphi + \delta)}{\cos(\delta)}$$

ahol $\delta = 23,44^\circ$.

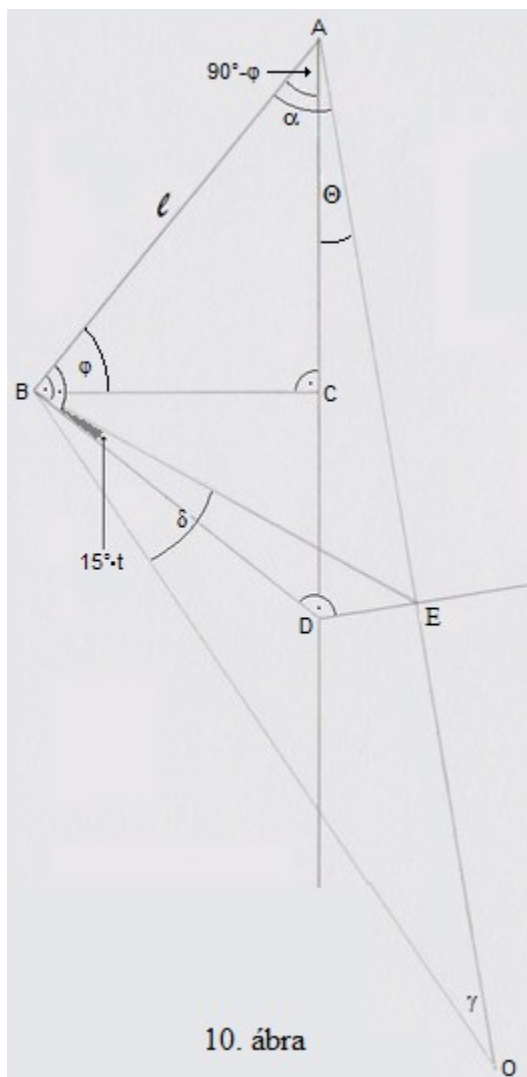


Vertikális napóra deklinációs vonalai

Pontosan ugyanúgy készíthetünk deklinációs vonalakat, ahogyan azt a horizontális napóránál láttuk, csak – mivel a napóra függőleges falra van szerelve – az árnyékvető hajlásszöge a falhoz mérve nem φ , hanem $90^\circ - \varphi$, valamint a Nap pozitív deklinációja esetén az O pont az E ponton túl lesz, így az ABO szög nem $90^\circ - \delta$, hanem $90^\circ + \delta$ ezért a képleteket át kell írni. A 10. ábrán a fal síkját az ADE háromszög határozza meg, ahol az AD egyenes függőleges, az AB szakasz pedig az árnyékvető.

Vegyünk a B ponton áthaladó olyan fénysugarat mely délben - napéjegyenlőség idején, amikor $\delta = 0^\circ$ - a D pontra esik, a B ponton áthaladó fénysugár ugyanezen a napon t órakor az E pontra esik (szöge: $\angle DBE = 15^\circ \cdot t$ fok). Mindkét fénysugár merőleges az árnyékvetőre és a két sugár kimetszi a DE napéjegyenlőségi egyenest a falon. Legyen

a BO egyenes az árnyékvető csúcsán áthaladó napsugár egy tetszőleges napon, szintén a fenti t időpillanatban, amikor a Nap deklinációja nem 0.



Ezért az O pont benne van az ABE síkban, mivel O rajta van az AE óravonalon.

$$1. \text{ Az ABD háromszögből: } BD = l \cdot \tan(90^\circ - \varphi) = \frac{l}{\tan(\varphi)}$$

$$2. \text{ A BDE háromszögből } BE = \frac{BD}{\cos(15^\circ \cdot t)} = \frac{l}{\tan(\varphi) \cdot \cos(15^\circ \cdot t)}$$

3. Ezért az $\alpha = BAE$ $\sphericalangle$ jelöléssel:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{BE}{l}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan(\varphi) \cdot \cos(15^\circ \cdot t)}\right)$$

4. Végül tekintsük az AOB háromszöget. A háromszög ABO szöge: $ABO \sphericalangle = 90^\circ + \delta$, és a

$$\gamma = AOB \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - ABO \sphericalangle = 90^\circ - (\alpha + \delta) \quad \text{Most a szinusz té-}$$

telt alapján: $\frac{AO}{l} = \frac{\sin(90^\circ + \delta)}{\sin(\gamma)}$, amiből

$$AO = \frac{l \cdot \cos(\delta)}{\sin(90^\circ - (\alpha + \delta))} = \frac{l \cdot \cos(\delta)}{\cos(\alpha + \delta)}.$$

A deklinációs vonalak szerkesztése hasonlóan történik a horizontális napóra deklinációs vonalainak szerkesztéséhez.



Elforduló vertikális napóra

$$\tan(\Theta') \cdot \tan(\varphi) = \frac{\sin(\Theta)}{\cos(\Theta) \cdot \cos(\eta) + \sin(\Theta) \cdot \sin(\eta)}$$

Az egyenletet rendezve, és felhasználva, hogy $\tan(\Theta) = \sin(\varphi) \cdot \tan(15^\circ \cdot t)$, kapjuk a végeredményt.

$$\tan(\Theta') = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\eta) \cdot \cot(15^\circ \cdot t) + \sin(\eta) \cdot \sin(\varphi)}$$

Ezek alapján φ és η ismeretében meghatározhatjuk az **elforduló vertikális napóra** óraszögeit.⁷

Ha $\eta=0^\circ$, akkor $\sin(0^\circ)=0$ és $\cos(0^\circ)=1$ miatt megkapjuk a vertikális napóra egyenletét.

Az árnyékvető minimális hossza itt megegyezik a „tisztán” vertikális napóra árnyékvetőjének hosszával, mivel az óra számlapját úgy kapjuk, hogy a 12 óraponton átmenő függőleges egyenes körül (ami átmegy az árnyékvető talppontján) a számlapot elforgatjuk η szöggel, de az árnyékvetőt nem. Ezért téli napforduló alkalmával délben az árnyékvető csúspontjának árnyéka nem változik.

Elforduló vertikális napóra deklinációs vonalai

Ennél a napóra típusnál a deklinációs vonalak matematikai meghatározása hasonlóan történik, mint az előbbieken, de – az elfordulás szöge miatt – jóval bonyolultabb a számítás. Amennyiben gondot okoz a Kedves Olvasónak, ezt a részt nyugodtan hagyja ki.

Tekintsük a 12. ábrát!

Az ABC derékszögű háromszög legyen a meridián síkban, mely a falat az AC egyenesben metszi, és ahol az AB szakasz az árnyékvető, ami a pólusra mutat. A fal elfordulása a kelet-nyugat iránytól, keletről dél felé, η szög. (Felülről nézve az óramutató járásával megegyező irány pozitív, a másik negatív.) Bocsássunk a B pontból a fal síkjára merőleges egyenest, melynek talppontja legyen D. Ezért a $CBD \sphericalangle = \eta$. Továbbá legyen az AO egyenes egy tetszőleges időben az AB árnyékvető árnyéka, mely az AC egyenessel θ' szöget zár be.

Az ℓ hosszúságú AB árnyékvető B végpontjába állítsunk egy az árnyékvetőre merőleges síkot, mely a fal síkját EFG egyenesben metszi, ami a $\delta=0^\circ$ deklinációs vonal.

⁷A Föld déli féltekén készítendő napóra esetén a képlet nevezőjében összeadás helyett kivonás szerepel.

Tekintsük az EFB derékszögű háromszöget, ahonnan:

$$EBF \sphericalangle = \arccos\left(\frac{BF}{BE}\right) = \arccos\left(\frac{l \cdot \tan(\beta)}{l}\right) = \arccos(\tan(\beta) \cdot \tan(\varphi))$$

Az eddig kiszámolt adatok csak a földrajzi szélességtől és a fal elfordulási szögétől függenek, ezért itt állandóak. Ezt jelzi a piros szín is.

Mivel az $EBG \sphericalangle = 15^\circ \cdot t$, ezért az

$$FBG \sphericalangle = 15^\circ \cdot t - EBF \sphericalangle = 15^\circ \cdot t - \arccos(\tan(\beta) \cdot \tan(\varphi))$$

Abban az esetben, ha $\eta < 0$ akkor az $EBF \sphericalangle$ szöget $15^\circ \cdot t$ -hez hozzá kell adni, vagyis a képlet így alakul:

$$FBG \sphericalangle = 15^\circ \cdot t + EBF \sphericalangle = 15^\circ \cdot t + \arccos(\tan(\beta) \cdot \tan(\varphi))$$

Tehát a BGF derékszögű háromszögből $\cos(FBG \sphericalangle) = \frac{BF}{BG}$, ezért:

$$BG = \frac{BF}{\cos(FBG \sphericalangle)} = \frac{l \cdot \tan(\beta)}{\cos(FBG \sphericalangle)}. \text{ Tekintsük most az ABG szintén derékszögű háromszöget, melynek derékszögű csúcsa B. Innen: } \tan(\alpha) = \frac{BG}{l} = \frac{\tan(\beta)}{\cos(FBG \sphericalangle)}.$$

Ezek alapján az α szög meghatározható, így már csak az AO távolságra van szükségünk. Tekintsük az ABO háromszöget. Ennek γ szöge $\gamma = 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \delta) = 90^\circ - (\alpha + \delta)$

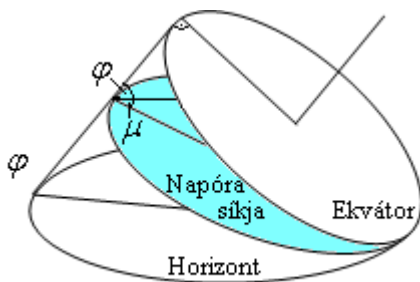
Az ABO háromszögből szinusz tétellel:

$$AO = \frac{l \cdot \sin(90^\circ + \delta)}{\sin(\gamma)} = \frac{l \cdot \cos(\delta)}{\cos(\alpha + \delta)}.$$

Összefoglalva: Kiszámoljuk az elforduló vertikális napóra óravonalait és felrajzoljuk azokat. A fent leírt módon minden δ deklinációra adott t paraméter esetén meghatározzuk az AO szakasz hosszát és az adott t paraméterű óravonalra A-ból felmérjük.

Emelkedő napóra

Nevezzük emelkedő napórának azt a napórát, melynek az órasíkja a vízszintessel μ szöget zár be és a 12 óra iránya észak felé van.⁸ (Lejtős napórának is nevezhetjük.) A mellékelt ábrán az ekvatoriális óralapot – az ekvátorra merőleges egyenesekkel – vetítjük a napóra síkjára. Ezért a horizontális napóra levezetésével teljesen azonos módon járhatunk el, csak a φ szög helyére $\varphi + \mu$ szöget kell írunk.



13. ábra

Így a kapott egyenlet: $\tan(\Theta) = \sin(\varphi + \mu) \cdot \tan(15^\circ \cdot t)$

Ha μ értéke 0° , akkor visszakapjuk a horizontális napóra egyenletét, ha $\mu = 90^\circ$, akkor $\sin(\varphi + 90^\circ) = \cos(\varphi)$ miatt a vertikális napóra egyenletéhez jutunk.

A deklinációs vonalak meghatározása alkalmával, szintén $\varphi + \mu$ értéket kell beírni a földrajzi szélesség helyére, a megfelelő horizontális képletekbe.

Készíthetünk még **elforduló emelkedő napórát** is. Az elfordulás szöge η , az emelkedés szöge pedig μ . Erre akkor van szükség, ha például a háztetőre akarunk napórát rajzolni, és a tető gerince nem kelet-nyugat irányú. Ebben az esetben a $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ szöget kell kiszámolni, amit a következő képletek határoznak meg.

$$\tan(\Theta_1) = \tan(\eta) \cdot \cos(\mu)$$

$$\tan(\Theta_2) = \frac{\cos(\mu) \cdot \cos(\eta) \cdot \sin(\varphi) + \sin(\mu) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\mu) \cdot \sin(\eta) \cdot \cot(15^\circ \cdot t)}{\sin(\eta) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\eta) \cdot \cot(15^\circ \cdot t)}$$

A képlet levezetésétől itt eltekintünk.

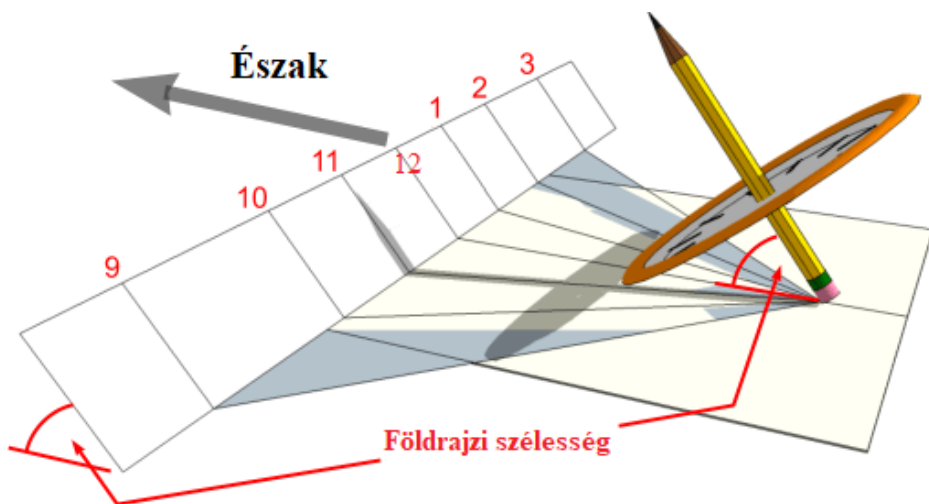
⁸Ennek az óratípusnak az órasíkja észak felé lejt, vagy emelkedik.

Poláris, orientális és okcidentális napóra

Ezt a három napórátípust azért tárgyaljuk egy fejezetben, mert mindhárom származtatása és szerkesztése hasonló. Mindhárom napórát úgy kapjuk, hogy az ekvatoriális napórát merőlegesen vetítjük az adott napórátípus síkjára. Ezért mindhárom napóra árnyékvetője és óravonalai párhuzamos lesz a Föld forgástengelyével.

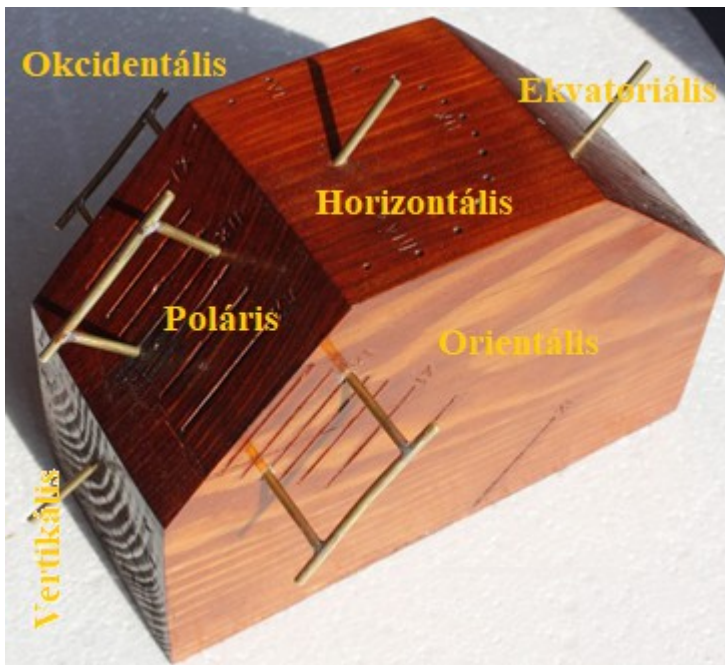
A **poláris** napóra számlapsíkját a vízszintes kelet-nyugat irányú egyenes és a Föld forgástengelye határozza meg. Ezt a napórát – egy a Nap által jól megvilágított téren – egy konzolra szokták helyezni, ezért az észak felé történő irányítása egyszerű.

A következő ábrán megfigyelhetjük hogyan származtatható a poláris napóra az ekvatoriálisból a horizontálison át.



Az **orientális** (kelet irányú) napóra számlapsíkja a helyi meridián sík keleti oldala, amit egy szigorúan kelet felé néző függőleges falra szerkeszthetünk, az **okcidentális** (nyugat irányú) napórát pedig a ház nyugati oldalára szerkesztjük, ezért ennek a két napórának a számlapsíkja szintén párhuzamos a Föld forgástengelyével.

A következő képen a hat különböző napórán jól látható, hogy mindegyik árnyékvetője párhuzamos egymással, és ha a napórát észak felé irányítjuk, akkor a Föld forgástengelyével is



Megjegyzés: Ha a fal nem szigorúan kelet, vagy nyugat felé néz, akkor is szerkeszthetünk rá napórát, amit az elforduló vertikális napóránál tárgyaltunk.

szokásos 12 óra előtti, vagy 12 óra utáni időértéket jelöli. Ha $t = -6$, vagy $t = +6$, akkor a tangens függvény értéke végtelen, ami reggel 6 és este 18 órát jelent. Ezek alapján a poláris napóra csak reggel 6 óra és este 18 óra között mutatja a szoláris időt.

Poláris napóra deklinációs vonalai

Már csak egy tetszőleges δ (Nap deklináció) értékhez kell meghatározni mindegyik óravonalon az $y=BC$ deklinációs távolságokat.

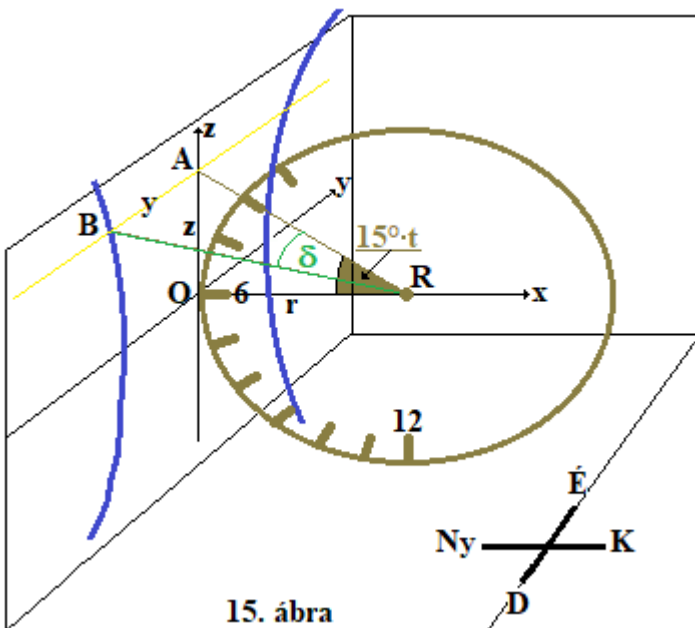
Az AOB háromszögből: $AB = \frac{r}{\cos(15^\circ \cdot t)}$, majd az ABC derékszögű

háromszögből $\delta = \frac{y}{AB}$. Így a végeredmény: $y = \frac{r \cdot \tan(\delta)}{\cos(15^\circ \cdot t)}$

A Nap egy adott δ deklinációja esetén, ezeket a pontokat minden óravonalra felrajzolva megkapjuk az adott deklinációs vonalat.

2. Orientális napóra:

Ha a 14. ábrán az ekvatoriális napóra körét elmozgatjuk úgy, hogy a 6 órapont az origóban érintse a z tengelyt és az R középpont az x tengely pozitív felére essen, akkor az **orientális napóra** óravonalait és deklinációs



15. ábra

vonalait határozhatjuk meg. (Lásd 15. ábra) A napóra számlapsíkja ebben az esetben az yz sík.

Az AOR derékszögű háromszögből: $z = OA = r \cdot \tan(15^\circ \cdot t)$

A deklinációs vonal és az adott (sárga) óravonal B metszéspontja, az AOR háromszögből: $AR = \frac{r}{\cos(15^\circ \cdot t)}$ és az RAB derékszögű háromszögből: $y = AB = AR \cdot \tan(\delta) = \frac{r \cdot \tan(\delta)}{\cos(15^\circ \cdot t)}$

Ugyanazokhoz a képletekhez jutottunk, itt viszont t a 6 óra előtti és utáni óraszámokat jelenti.

Az orientális napóra napkeltétől egészen délelőtt 12 óráig mutatja a szoláris időt.⁹

3. Okcidentális napóra:

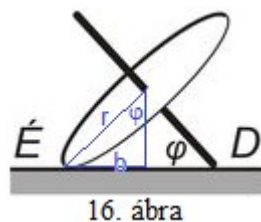
Az okcidentális napóra teljesen hasonlóan számolható, mint az előbbi, csak az ábrán az ekvatoriális napóra órakörtét át kell vinni az x tengely mások oldalára, hogy a 18 órapont érintse az origóban a z tengelyt. Ezért ezt a feladatot az olvasóra bízuk. Ha a jelölést megtartjuk, a képletek ugyanazok maradnak.

Ez a napóra viszont dél 12 óra után mutatja a szoláris időt 18 órán át egészen napnyugtáig.

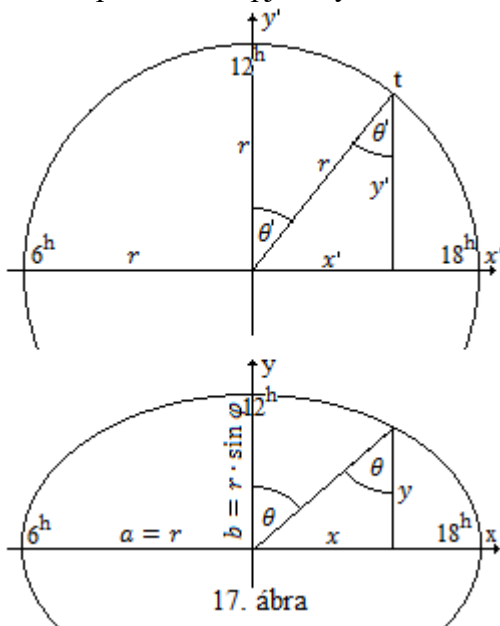
⁹A 12 óra előtti óravonalak (negyedóra vonalak, percvonalak) már egyre messzebb kerülnek, 12 óra pedig a végtelenben lesz.

Analemmatikus napóra

Ha az ekvatoriális napóra kör alakú számlapját merőlegesen vetítjük a horizontra, analemmatikus napóra számlapot kapunk. A kör vetülete egy olyan ellipszis, melynek fél nagytengelye megegyezik a kör sugarával $a=r$, fél kistengelye pedig $b=r \cdot \sin(\varphi)$, ahol φ a földrajzi szélesség.



A 17. ábra felső része az ekvatoriális napóra számlapja, $x'y'$ koordináta-rendszerben, ahol az y' tengely észak felé mutat, az x' tengely pedig keletre. Az ábra alsó részén az analemmatikus óra-számlap látható xy koordináta-rendszerben hasonló irányítással. Az ekvatoriális napóra árnyékvetőjének „t” időpontra mutató árnyéka szöget zár be az y' tengellyel. Az ábrán látható, hogy az órapont x koordinátája a vetítés során nem változik, vagyis $x=x'$, a pont y koordinátája viszont $y=y' \cdot \sin(\varphi)$ lesz.



Számoljuk ki az ekvatoriális napóra órapontjainak koordinátáit! A felső ábráról a derékszögű háromszög adataiból:

$x' = r \cdot \sin(\Theta')$ és $y' = r \cdot \cos(\Theta')$ ezért $x = r \cdot \sin(\Theta')$ és $y = r \cdot \cos(\Theta') \cdot \sin(\varphi)$ Ezzel a két egyenlettel könnyen kiszámolhatjuk az analemmatikus napóra megfelelő órapontjait, csak Θ' helyére $\Theta' = 15^\circ \cdot t$ kell írni.

Ha valaki nem a koordinátával, hanem szöggel szeretné szerkeszteni a napórát, akkor azt a következő módon teheti meg. Meg kell határoznia az

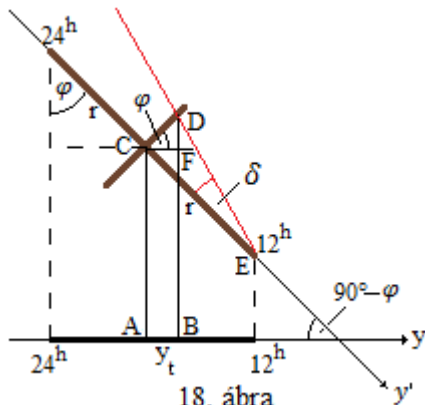
alsó ábrán látott Θ szöget:

$$\tan(\Theta) = \frac{x}{y} = \frac{r \cdot \sin(\Theta')}{r \cdot \cos(\Theta') \cdot \sin(\varphi)} = \frac{\tan(\Theta')}{\sin(\varphi)} = \frac{\tan(15^\circ \cdot t)}{\sin(\varphi)} . \text{ Így a } \Theta$$

óraszögek értékét kell kiszámolni és az előre megszerkesztett ellipszis középpontjából felmérni a megfelelő irányba, ami kimetszi az órapontokat.

Ennél egyszerűbb az x és y koordináták kiszámolása után az xy rendszerbe felmérni a megfelelő órapontokat. (Természetesen ezek is az ellipszisen helyezkednek el.)

Már csak az árnyékvető talppontjának helyét kell meghatározunk és berajzolunk az y tengelyre. A 18. ábrán a két napóra y' és az y koordináta tengelyek által meghatározott síkmetszete látható. Az ekvatoriális napóra számlapsíkja $90^\circ - \varphi$ szöggel hajlik a horizonthoz, árnyékvetője pedig φ szöget zár be vele.



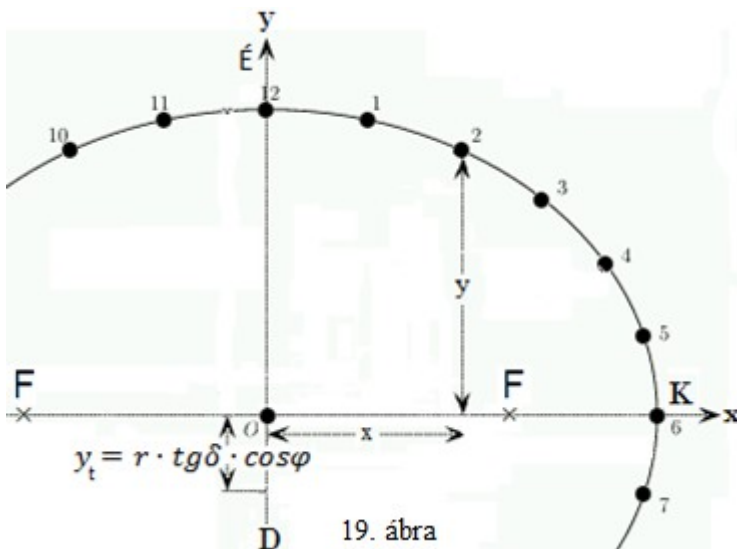
18. ábra

Az ábrán piros vonal jelöli azt a napsugarat, ami egy adott napon az árnyékvetőn áthaladva az órapontokat világítja meg. Ennek a napsugárnak az árnyékvetővel alkotott D metszéspontját kell az y tengelyre vetítenünk (B pont), mert ez lesz az analemmatikus napóra árnyékvetőjének pillanatnyi talppontja. Az EDC derékszögű háromszögből $CD = r \cdot \tan(\delta)$, ahol δ a Nap pillanatnyi deklinációja. Az FDC derékszögű háromszögből pedig:

$$y_t = CF = CD \cdot \cos(\varphi) = r \cdot \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi) .$$

Összefoglalva.

Az órapontok koordinátái: $x = r \cdot \sin(15^\circ \cdot t)$
 $y = r \cdot \cos(15^\circ \cdot t) \cdot \sin(\varphi)$
 Az árnyékvető talppontja: $y_t = r \cdot \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi)$



Tehát egy adott órapont szerkesztéséhez kiválasztjuk az adott órához tartozó t paramétert, majd kiszámítjuk az órapontok (x,y) koordinátáit. Ezen koordináták alapján az órapontot berajzoljuk a koordináta rendszerbe. Ezt a 19. ábra $t=2$ -re mutatja. Az órapontokat elég csak az első negyed ellipszisre kiszámolni, mert a többi tükrözéssel megkapjuk.

Már csak az árnyékvetítő talppontjának helyeit (y_i) kell megszerkeszteni. Az ábránkon február 1. van bejelölve, de bármilyen dátumra kiszámolhatjuk és berajzolhatjuk. Mi az állatövi csillagjegyek kezdetére számoltuk ki.

A következő táblázatban egy $r=200\text{ cm}$ sugarú napórára adjuk meg az órapontok (x,y) koordinátáit a koordináta rendszer első negyedére, valamint az árnyékvető talppontjának y_t koordinátáit az állatövi jegyek kezdő időpontjára, $\varphi=47^\circ$ -ra.

						Nap deklinációja	Árnyékvető talppontja
Idő	x=	y=				δ	y_t
12,0 h	0,0	146,8					
12,5 h	26,1	145,5	♈	Kos	márc. 21.	0,0°	0,0 cm
13,0 h	51,8	141,8	♉	Bika	ápr. 21.	10,8°	25,8 cm
13,5 h	76,5	135,6	♊	Ikrek	máj. 21.	19,6°	48,2 cm
14,0 h	100,0	127,1	♋	Rák	jún. 22.	23,4°	58,6 cm
14,5 h	121,8	116,5	♌	Oroszlán	júl. 23.	20,5°	50,6 cm
15,0 h	141,4	103,8	♍	Szűz	aug. 23.	11,8°	28,3 cm
15,5 h	158,7	89,4	♎	Mérleg	szept. 23.	0,0°	0,0 cm
16,0 h	173,2	73,4	♏	Skorpió	okt. 23.	-11,7°	-28,0 cm
16,5 h	184,8	56,2	♐	Nyilas	nov. 22.	-20,2°	-49,8 cm
17,0 h	193,2	38,0	♑	Bak	dec. 21.	-23,4°	-58,6 cm
17,5 h	198,3	19,2	♒	Vízöntő	jan. 20.	-20,8°	-51,4 cm
18,0 h	200,0	0,0	♓	Halak	febr. 19.	-12,7°	-30,5 cm

Hengernapóra

A hengernapóra (pásztorbot napóra, vagy pillér napóra) olyan napóra, melynek számlapja egy hengerre csavarodik, árnyékvetője pedig a henger tengelyére merőleges és a henger tengelye körül forgatható. A mellékelt ábrán ilyen látható.

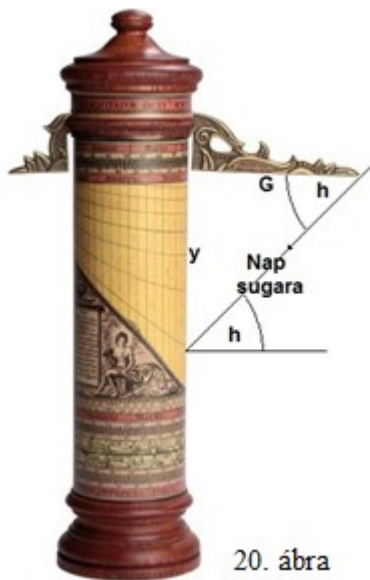
Ahhoz, hogy az árnyékvető csúcspontjának árnyékát megkapjuk, ismernünk kell a földrajzi szélességet (φ), és egy adott nap adott órájában a Nap horizont feletti magasságát (h). A Nap horizont feletti magasságát a következő képlet segítségével határozhatjuk meg. (Ez a horizontális – ekvatoriális koordináták közötti átszámítás képlete.)¹⁰

$$\sin(h) = \sin(\delta) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\tau)$$

Ahol δ a Nap deklinációja az adott napon, τ pedig a Nap pillanatnyi óraszöge. Mivel a szoláris helyi idő a Nap óraszöge +12 óra, ezért az óraszöget megkapjuk, ha a helyi időből 12 órát kivonunk. A h szögmagasság ismeretében az órapont y koordinátáját a $y = G \cdot \tan(h)$ képlet adja, ahol G az árnyékvető (gnómon) hossza. (Lásd 20. ábra.) A számítás kissé hosszadalmas, mert legalább az év minden tizedik napjára és legalább minden órára el kell végezni.

$$y = G \cdot \tan(h) = G \cdot \tan(\arcsin(\sin(\delta) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\tau)))$$

A 21. ábrán egy ilyen táblázat látszik, ahol a barna számok a képlet alapján számolt értékek, $G=5$ cm-es árnyékvetőre a $47,22^\circ$ földrajzi szélességre. A táblázat második és harmadik oszlopa a Nap óraszögét adja órában, illetve fokban.



20. ábra

¹⁰Itt nem vettük figyelembe a refrakciót. Ezt a képletet a jegyzetben már használtuk.

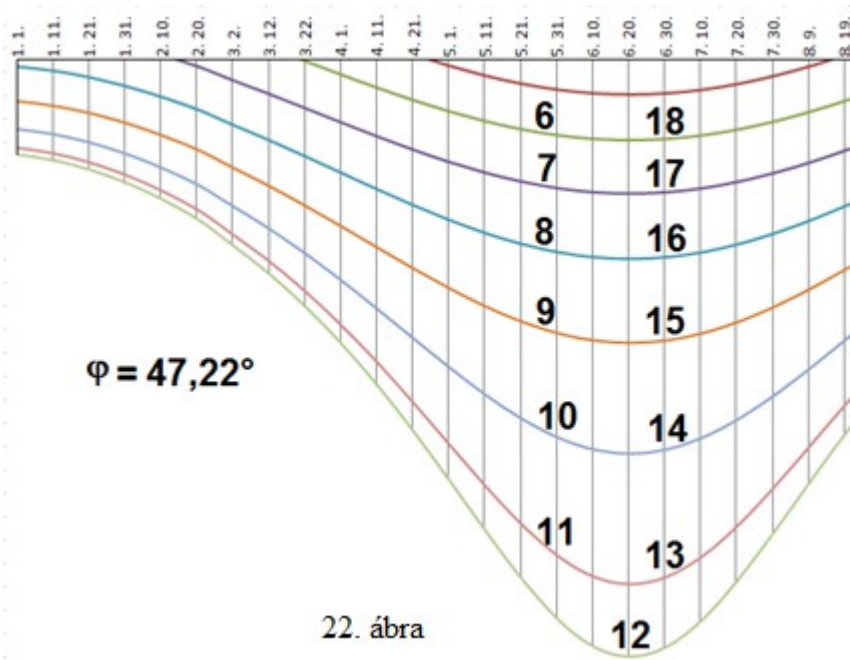
Mivel a Nap deklinációját az adott napon állandónak vettük – ami nem okoz nagy hibát – ezért az y értékek a déli 12 órára szimmetrikusak lesznek, ezért elég a táblázat délelőtti felét kitölteni.

A Nap deklinációja: $\delta = -23,02^\circ -21,93^\circ -20,18^\circ -17,58^\circ \dots -22,20^\circ -23,16^\circ -23,44^\circ -23,02^\circ$

Nap óraszöge		Dátum:											
Idő	$\tau[h]$	$\tau[^\circ]$	1. 1.	1. 11.	1. 21.	2. 1.	...	12. 1.	12. 11.	12. 21.	12. 31.		
4 h	-8	-120°	3,75	3,65	3,49	3,25	...	3,67	3,76	3,78	3,75		
5 h	-7	-105°	2,51	2,43	2,30	2,11	...	2,45	2,52	2,54	2,51		
6 h	-6	-90°	1,50	1,43	1,31	1,14	...	1,44	1,51	1,53	1,50		
7 h	-5	-75°	0,63	0,56	0,44	0,27	...	0,58	0,64	0,66	0,63		
8 h	-4	-60°	-0,13	-0,20	-0,33	-0,51	...	-0,19	-0,12	-0,10	-0,13		
9 h	-3	-45°	-0,78	-0,87	-1,01	-1,22	...	-0,85	-0,77	-0,75	-0,78		
10 h	-2	-30°	-1,31	-1,41	-1,57	-1,80	...	-1,39	-1,30	-1,28	-1,31		
11 h	-1	-15°	-1,67	-1,77	-1,95	-2,21	...	-1,75	-1,66	-1,63	-1,67		
12 h	0	0°	-1,80	-1,90	-2,08	-2,35	...	-1,88	-1,78	-1,75	-1,80		

$\varphi = 47,22^\circ$ $G = 5\text{ cm}$ 21. ábra

A 22. ábrán látható grafikon-részlet a táblázat alapján készült. Lásd **nap-matek.xlsx** fájlt.



22. ábra

Megjegyzés: A henger sugara csak abból a szempontból fontos, hogy az óra számlapja körbeérjen. (Jan. 1. essen egybe dec. 31-el.) A működés szempontjából viszont lényegtelen az egybeesés, így nagyobb sugarú¹¹ hengerre is felragaszthatjuk a grafikont.

A napóra használata: Vigyük az árnyékvető talppontját a megfelelő dátumra, majd állítsuk a hengert függőleges helyzetbe úgy, hogy a Nap az árnyékvető élével párhuzamosan világítsa meg a számlapot, és olvassuk le a helyi szoláris időt.

¹¹Sőt végtelen sugarú henger, vagyis sík is elképzelhető.

A gyűrűs napóra és szerkesztése

A gyűrűs napóra, általában egy karperec nagyságú, hordozható napóra, melyen a dátumskálán be kell állítanunk a mai dátumot (a képen az egyik lyukat állítjuk a dátumra), majd függőlegesen tartva úgy forgatjuk, hogy a lyukon átmenő napsugár az óraskála megfelelő dátumvonalára (deklinációs vonalára) essen, ez után leolvashatjuk a **helyi szoláris időt**.



Sajnos a napóra hordozhatóságát az korlátozza, hogy az óraskála és a dátumskála függ a földrajzi szélességtől. Azért egy adott földrajzi szélességre szerkesztett napórát $\pm 2,5^\circ$ szélességi eltéréssel, még hibahatáron belüli pontossággal használhatunk.

Miután leolvastuk a helyi szoláris időt, szükség esetén meghatározhatjuk az általunk használt középidoőt is, ami három lépésből áll.

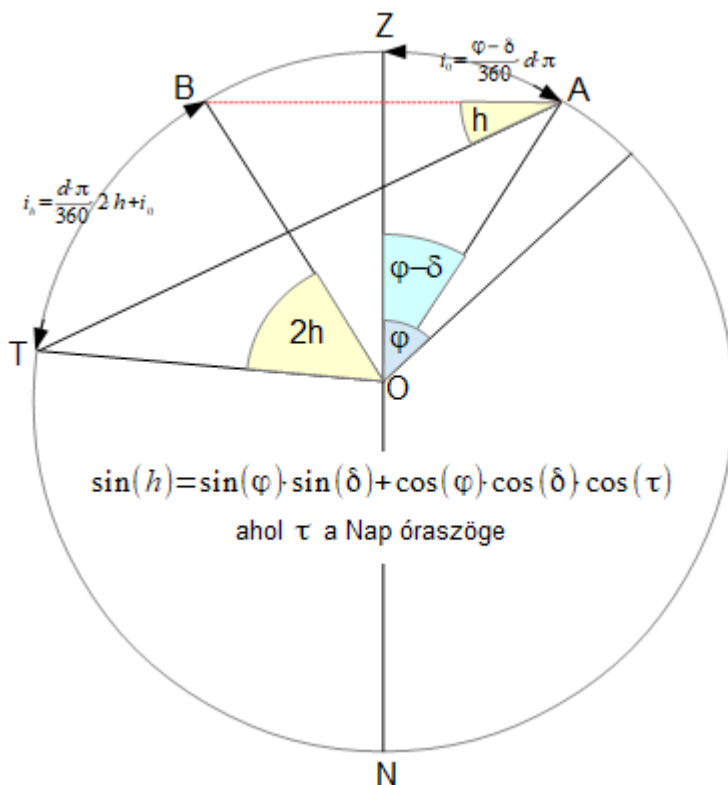
1. Figyelembe kell venni a hosszúsági korrekciót, ami a zónaközéptől való eltérésből adódik. A mi zónaközepünk 15° , ha ettől keletre mérünk, akkor fokenként 4 percet le kell vonni, nyugatra pedig fokenként 4 percet hozzá kell adni a mért helyi szoláris időhöz.
2. Nyári időszámítás esetén 1 órát hozzá kell adni a leolvasott értékhez.

3. A fentiekén kívül még hozzá kell adni az időegyenlítés értékét, mivel a Nap nem egyenletesen jár az égen. Ez az érték a dátumtól függ. (Lásd a mellékletben.)

Megjegyzés: Több napóránál, főleg a fix felállításúaknál a hosszúsági korrekciót bele szokták kalkulálni az óraskálába, amit teljesen feleslegesnek tartunk, mivel az időegyenlítéssel mindenképpen korrigálni kell a leolvasott helyi szoláris időt. Inkább toljuk el felfelé, vagy lefelé az időegyenlítés grafikonját a hosszúsági korrekció értékével, így csak egy korrekciót kell végrehajtanunk. (A nyári időszámítást leszámítva.)

A napóra szerkesztése

Rajzoljunk a gyűrű belső átmérőjével azonos átmérőjű kört, (az ábránkon $d=20$ cm.) majd jelöljük ki a zenit (**Z**) - nadír (**N**) függőleges vonalat. A kör középpontjából húzzunk egy sugarat, mely a zenittel φ szöget zár be. (φ a földrajzi szélességünk.) Amennyiben egy adott napra meg akarjuk szerkeszteni az órapontokat, akkor húzzunk egy **OA** sugarat úgy, hogy a **ZOA** szög $\varphi - \delta$ legyen, ahol δ a Nap mai napi deklinációja. A sugár **A** végpontjából húzzunk egy vízszintes húrt, melynek másik végpontja **B**. Az **A** pont a dátumskála fénybeejtő rése lesz az adott napon. A fénybeejtő **A** rés a "nyári napforduló" és a "téli napforduló" között váltakozik a Nap deklinációjának függvényében. $-23,44^\circ \leq \delta \leq +23,44^\circ$.



Számoljuk ki a mai nap adott **T** órájára a Nap horizont feletti h magasságát, majd az **A** pontból szerkesszük meg a **BAT**= h szöget. A kerületi és középponti szögek tétele értelmében a **BOT** szög = $2h$.

Következő lépésben számoljuk ki a fénybeejítő rés ívtávolságát a **Z** zenitponttól. Ez a mai napon: $i_0 = \frac{\varphi - \delta}{360} \cdot d \cdot \pi$

Végezetül határozzuk meg a mai nap **T** időpontjában a **BT** ív i_h hosszát.

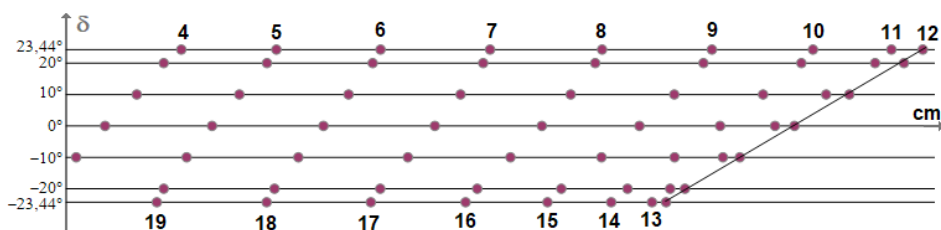
$$i_h = \frac{d \cdot \pi}{360} \cdot 2 \cdot h$$

A fenti műveletet az év minden napjára, a nap minden órájára (félóra, negyedóra, ...) meg kellene ismételnünk.

Szerencsére a szimmetria miatt elég a számolást a délelőtti órákra elvégezni, mert a délutáni 1 óra megfelel a 11 órapontnak, a 2 óra megfelel a 10 órapontnak stb.

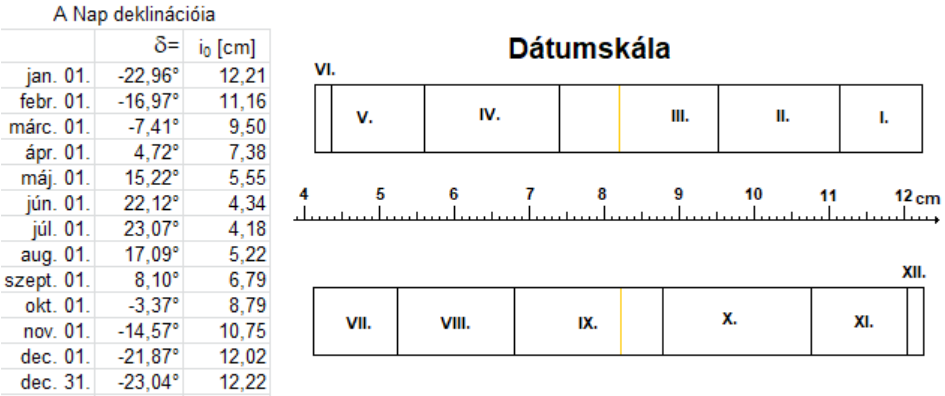
Másik könnyebbség, hogy elég a műveletet két napra - a nyári és a téli napforduló idejére - elvégezni, majd az órapontokat a készülő óraskála szalagjára felrajzolni és a két-két azonos órapontot egyenes szakasszal összekötni.

A lenti ábrán egy ilyen szerkesztés végeredménye látható, ahol az órapontok zenittől mért távolsága $i_0 + i_h$. Ez egy 20 cm átmérőjű napóra óraskálája, amit a $\varphi = 47^\circ$ -ra számoltunk ki. Itt **arányos távolságra** megrajzoltuk a deklinációs vonalakat majd a $-23,44^\circ$; -20° ; -10° ; 0° ; 10° ; 20° ; $+23,44^\circ$ deklinációs vonalon megjelöltük az órapontokat, és a megfelelő órákat egyenes szakasszal kötöttük össze.



Az ábrán jól látható, hogy a, tizedmilliméter pontossággal szerkesztett órapontok nem illeszkednek pontosan egy egyenesre, de egy kis átmérőjű napórán ezeket nyugodtan összeköthetjük egyenes szakasszal.

Már csak a fénybeejtő rés dátumlécét kell megszerkesztenünk. Erre szolgál a következő ábra, mely szintén a fent említett napórához készült.



A táblázatban levő i_0 ív adatait ábrázoltuk a két dátumcsíkon. Az ív kezdete, 0 cm a Z zenitpontnál van. A napéjegyenlőséget a sárga vonal jelzi. A fénybeejtő rés a két dátumskála között mozgatható. A rés szélességét az óraskála szélességével azonosra célszerű készíteni. Jól látszik, hogy napforduló idején a dátumskála összeszűkül, ezért a hónap sorszámát mellé írtuk.

Ha valaki kedvet kapott a napóra elkészítésére, akkor [innen](#) letölthet egy EXCEL-ben készített anyagot, mely segítségével könnyen kiszámolhatja a saját földrajzi szélességére és a saját henger átmérőjére a megfelelő adatokat.

„Éjszakai napóra”, a nokturlábium

Mint láttuk, a napóra minden megjelenési formájában egy számlapból és egy óramutatóból áll. Az óramutató az eddigi esetekben egy árnyékvető volt, amely – napsütés esetén – kijelöli a Nap irányát.¹²

Tekintsük a legegyszerűbb napórát, az ekvatoriális napórát. Ennek a számlapját a Föld egyenlítőjével párhuzamosan kell beállítani, így az árnyékvetője a pólusra fog mutatni. Ennek segítségével a számlapon bejelöljük az árnyékvető árnyékának irányát, ami a helyi szoláris időt adja, amennyiben az órabeosztást megfelelően állítottuk be. (Déli 12 óra észak felé mutat.)

Éjjel, amikor a csillagok látszanak, ezt a napórát úgy használhatjuk, hogy keresünk egy olyan – lehetőleg cirkumpoláris – csillagot, melynek a rektaszcenziója¹³ megegyezik a Nap pillanatnyi rektaszcenziójával, így a Nappal azonos órákörön van és ezt használjuk a Nap irányának kijelölésére. Ennek a feltételnek november hetedikén a Kis Göncöl β Ursae Minoris (Kochab) csillaga tökéletesen megfelel.

Mivel a Nap rektaszcenziója – az év folyamán – folyamatosan nő, ezért naponta más és más csillagot kell választanunk, vagy az óra számlapját megfelelő irányba el kell forgatnunk. A nokturlábium használatával ezt tesszük, vagyis a számlapot minden nap 1 fokkal, pontosabban $360/365$ fokkal az óramutató járásával ellentétes irányba elforgatjuk. Ehhez célszerű egy dátumskálát készítenünk és a számlapot a dátum megfelelő helyére állítanunk.

Több nokturlábiumon nem csak a Kochab csillagot használják óramutónak, hanem még elterjedt az α Cassiopeiae (Shedir) és az α Ursae Maioris (Dubhe) is.

¹²Pontosabban a Nappal ellenkező irányba mutat.

¹³A rektaszcenzió a második ekvatoriális koordináta-rendszer első koordinátája.



Használata: Kiválasztunk egy jól látható csillagot a fent leírt „pointer” csillagok közül.¹⁴ A megfelelő fület a mai dátumra állítjuk. (Ha elég nagy a tárcsa, akkor a dátumon belül is van lehetőségünk a napszak beállítására.) Ezek után az óratárcsát a dátumtárcsához szorítjuk és a nyelvvel lefelé úgy tartjuk, hogy a középső lyukon a sarkcsillag legyen látható, ami egyben biztosítja a tárcsa ekvátorral párhuzamos állását is. Végül a mozgó mutatót elforgatjuk úgy, hogy az éle a kiválasztott csillagot érintse és leolvassuk a helyi szoláris időt. Amennyiben a nokturlábium hátuljára az időegyenletet rajzoltuk, a mért időt azonnal átszámolhatjuk helyi közép-időre.

A helyi-idő és a zónaidő közötti korrekciók

A napóra a valódi Nap mozgása által mutatott helyi szoláris időt mutatja. Ahhoz, hogy az óráink által mutatott zónaidőt kapjuk, három korrekciót kell végrehajtani.

- figyelembe kell venni az időegyenletet¹⁵,
- a földrajzi hosszúságot és
- a nyári időszámítást.

¹⁴Itt LD jelentése Little Dipper (Kis Merőkanál, magyar neve Kis Medve), BD jelentése Big Dipper (Nagy Merőkanál, magyar neve Nagy Medve), a CAS jelentése Cassiopeia.

¹⁵Az időegyenlet a földpálya ellipszis alakját és a Föld tengelydőlését veszi figyelembe. <http://mb-soft.com/public3/equatetime.html>

Időegyenlet

Mint a bevezetőben említettük az időegyenlet függ a Föld pálya excentricitásától és a pályahajlás szögétől. Ráadásul mindkettő az idő függvényében kissé változik. Ezért ennek meghatározása megfelelő pontossággal nagyon nehéz feladat, amire itt mi nem vállalkozunk. Viszont létezik több numerikus formula, amely segítségével kisebb-nagyobb pontossággal meghatározható. Itt mi az egyik megoldást ismertetjük.

Mielőtt hozzákezdenénk megjegyezzük, hogy az időegyenletet két formában is használhatjuk. $\Delta t = t_{\text{szoláris}} - t_{\text{közép}}$ vagy $\Delta t = t_{\text{közép}} - t_{\text{szoláris}}$. Én a második képletet használom, mivel ekkor a középido meghatározásához a napóra által mutatott szoláris időhöz az időegyenlítést előjelhelyesen hozzá kell adni.

A közelítő képletek:

$$\Delta t = -9,87 \cdot \sin(2 \cdot M) + 7,53 \cdot \cos(M) + 1,5 \cdot \sin(M)$$

$$M = \frac{2 \cdot \pi \cdot (N - 81)}{364,2449}$$

Ahol N a napok sorszáma január 1.-től.¹⁶ Mint a képletből látjuk M értéke radiánban értendő!

A fentiek alapján számolt időegyenlet a hátsó borítón látható.

Nyári időszámítás

A napóránál a nyári időszámítást a legkönnyebb beszámítani, mert a nyári időszámítás ideje alatt 1 órát hozzá kell adni, a napóra által mutatott időhöz. Ezt a legegyszerűbben úgy oldhatjuk meg, hogy a napórára két skálát készítünk. Egy normál skálát pl. római számokkal, és egy nyári időszámítás skálát arab számokkal.

Földrajzi hosszúsági korrekció

Ez a korrekció sem okoz nagy gondot, mert fokként 4 percet kell hozzáadni, vagy elvenni a mutatott értékből aszerint, hogy a zónaközéptől nyugatra, vagy keletre vagyunk. Például Szombathely földrajzi hosszúsá-

16365,2422 csillagnap=364,2449324 valódi nap.

ga $16^{\circ} 36'$, ami a zónaközéptől (15°) $1^{\circ} 36' = 1,6^{\circ}$ -kal van keletre, ezért amit el kell venni a napóra által mutatott időből. (Ezt egy rögzített napóránál úgy is megtehetjük, hogy a korrekciót hozzászerkesztjük az időegyenlethez.)

Megjegyzések

Hosszúsági korrekció beépítése a képletekbe

Ha a napóra órabeosztását a hosszúsági korrekcióval szeretnénk elkészíteni, akkor csak a szögfüggvény argumentumába ($15^{\circ} \cdot t$) helyére ($15^{\circ} \cdot t + \Delta\lambda$) értéket kell írni, ahol $\Delta\lambda$ a hosszúsági korrekció fokban.
($\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{zónaközép}}$)

Napi egyenlőtlenségek

Az időegyenlet a valódi Nap és a középkvatoriális nap különbségét írja le, de nem veszi figyelembe a Nap látszólagos mozgásának napi ingadozását, amit a refrakció okoz. A refrakció miatt napkeltekor a napóránk siet kb. két percet, ez a sietés rohamosan csökken, délre megszűnik, majd dél után késésbe megy át, ami napnyugtakor szintén eléri a két percet.

Analemma görbe

Ha az időegyenlet birtokában vagyunk, akkor könnyen készíthetünk analemma görbét, a Nap deklinációjának felhasználásával. Ez látható a hátsó belső borítón.

A helyi meridián pontos kijelölése.

A napóra tervezése és felállítása közben gyakran van szükségünk a pontos észak – dél irány kijelölésére. Ezt többféleképpen tehetjük meg.

1. Ha ismerjük a mágneses deklináció pillanatnyi értékét, egy jó iránytű segítségével meghatározható a helyi meridián vonala.¹⁷
2. Az indiai kör használatával elég jó eredmény érhető el, de ez türelmjáték. Rá kell szánni egy napot, amikor napsütés van.

¹⁷Amágneses deklináció pillanatnyi értékét a következő weblapon a térkép megfelelő helyére kattintva megtekinthetjük. <http://www.magnetic-declination.com>

3. A legjobb és leggyorsabb megoldás egy napsütéses napon a helyi valódi dél (szoláris dél) időpontjában egy gnómon árnyékát bejelölni. Ehhez csak az időegyenlet pontos értékét és a földrajzi hosszúság értékét kell ismerni. Például az időegyenlítés május elsején -2,87 perc ($\Delta t = t_{\text{közép}} - t_{\text{szoláris}}$), Szombathely hosszúsági korrekciója pedig -6,4 perc, így a Nap május elsején Szombathelyen (A nyári időszámítás miatt.) 13 óra – 2,87 perc -6,4 perc = 12 óra 50 perc 43,8 másodperckor delel. (Ekkor kell a gnómon árnyékát megjelölni.)
4. Ha van egy jó teodolitunk, akkor egy csillagászati planetárium-program segítségével megállapítjuk, hogy egy bolygó, vagy csillag mikor delel, ekkor ráállunk az égitestre, rögzítjük a teodolit azimutját, majd a magassági kör segítségével a fonálkeresztet levisszük a horizont-ra¹⁸.

Melléklet: A füzetben levő képletek felhasználásával készült egy napmatek.xlsx EXCEL táblázat, melyben minden napórátípus szerepel.

Deklinációs vonalakat szerkesztő eszköz:

Ha valaki nem akar minden egyes óraponthoz és minden egyes deklinációs vonalhoz – a füzetben leírtak alapján – koordinátákat számolni, akkor a következő eszközzel könnyedén megrajzolhatja a dátumvonalat a napórára. (Lásd következő kép.) Használata a következő: Állítsuk be a dátumvonalnak megfelelő δ Nap deklinációt a szögmérő skáláján, majd húzzuk a réz csövet ütközésig az árnyékvetőre. Az eszköz forgatásával a lézermutató megmutatja a deklinációs vonal pontjait, amit tetszőleges súrúsággal megjelölhetünk. A lézersugár egy $90^\circ - \delta$ fél nyílásszögű kúppalástot ír le, aminek a számlap síkjával alkotott metszészvonala hiperbola, mivel a kúppalást két alkotója is párhuzamos a számlap síkjával.

¹⁸Ez teodolit nélkül fotóállvánnyal is elvégezhető.



Természetesen a számításos módszerrel milliméter pontosságot érhetünk el, ezzel az eszközzel viszont nem.

